Journal für Didaktik der Naturwissenschaften und der Mathematik (P/S)
Mai 2017, Vol. 1, pp. 10-13

Der Zustand „zeitgemäßer" Schulmathematik - Exemplarisch dargestellt anhand einer Abitur-Musteraufgabe des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB)

The state of „contemporary" mathematics education - An exemplary discussion of a paradigmatic Abitur problem proposed by the IQB

Sebastian Walcher

Zusammenfasssung

Die Herkunft und Metamorphose einer aktuellen Musteraufgabe zur Kompetenzorientierung im Mathematikabitur wird diskutiert. Insbesondere wird hierbei der Kontrast zwischen realer Modellierung und weitgehend sinnentleerter Einkleidung mathematisch anspruchsloser Aufgaben herausgestellt.der Schüler beim Übergang in die Oberstufe aufzuzeigen. Ein einfacher und praktikabler Ausweg aus dieser Sackgasse wird vorgeschlagen.

Schlüsselwörter: Mathematische Modellierung, Kompetenzen, Zentralabitur

Abstract

We discuss the genealogy and the metamorphosis of a contemporary prototypical competency-oriented mathematical exam problem. In particular we emphasize the contrast between a real-world modeling process and the largely meaningless disguising of quite simple mathematics problems.

Keywords: Mathematical modelling, competencies, centralized secondary-school examinations

1 Erinnerung an die Studienzeit

Eines der Standardlehrbücher im Physikstudium des Verfassers war „der Gerthsen", geschätzt wegen seiner kurzen, prägnanten Art und (von manchen) wegen seiner interessanten und oft kniffligen Aufgaben. Bei einer dieser Aufgaben geht es um die Lage des Schwerpunktes einer zylindrischen Getränkedose, die zunächst voll ist und dann (langsam) geleert wird: Bei voller und bei ganz leerer Dose befindet sich der Schwerpunkt genau auf halber Höhe, dazwischen liegt er tiefer. Zu bestimmen ist die Füllhöhe, bei welcher der Schwerpunkt am tiefsten liegt. Zusätzlich wird gefragt, welche Besonderheit diesen Füllstand auszeichnet. Diese klassische Aufgabe findet man auch in neueren Auflagen und Überarbeitungen des „Gerthsen" (siehe Meschede, D. 2006, Seite 91, Aufgabe 2.3.1). Selbstverständlich sind dabei keine Zahlenwerte vorgegeben; das Problem wird gerade dadurch interessant, dass man die Masse der Dose, die Dichte der Flüssigkeit sowie Höhe und Radius der Dose als Parameter mitnimmt.
[Es sei angemerkt, dass sich diese Aufgabe auch in der Schulbuchliteratur (siehe Herget, Jahnke, Kroll (Herget, W., Jahnke, T., Kroll, W. 2011) sowie – in abgeschwächter Form -- im populärwissenschaftlichen Buch von Drösser (2008) findet.]

Für die Lösung benötigt man eine nicht ganz triviale physikalische Tatsache, welche die Bestimmung des Schwerpunkts der teilweise gefüllten Dose aus den Schwerpunkten der leeren Dose und des Flüssigkeitsvolumens ermöglicht (Stichwort Konvexkombination). Damit bestimmt sich die Lage des Schwerpunkts als (rationale) Funktion h der Füllhöhe x, und es bleibt eine leichte Minimierungsaufgabe zu lösen. Die Pointe: Der Schwerpunkt liegt dort am tiefsten, wo er

gerade auf dem Flüssigkeitsspiegel liegt.
Die Schwierigkeit der Aufgabe lag seinerzeit sicher nicht in der Diskussion der Funktion h, sondern in der Herleitung der relevanten Beziehungen (nach Aufstellen des Modells) und vielleicht in der physikalischen Interpretation des Ergebnisses.

2 Die „zeitgemäße" Musteraufgabe

Der Autor fühlte sich nun an seine Studienzeit erinnert, als er auf der Webseite des „Instituts für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB)" unter anderem folgende Aufgabenstellung fand (siehe IQBa, Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 1, Teilaufgabe 2).

Der einleitende Text wird (zur Vermeidung von Sonderzeichen) leicht paraphrasiert und ohne Abbildungen wiedergegeben.

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung 2).
Abbildung 3 zeigt den Graphen der Funktion h, die für x zwischen 0 und 15 die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. Der Graph hat den Tiefpunkt (3|3).

In einem späteren Aufgabenteil wird noch explizit der Funktionsterm

$$h(x)=x/2-1/2+8/(x+1)$$

angegeben. Zu Beginn sind jedoch zwei Teilaufgaben (a) und (b) zu bearbeiten, die nichts weiter als Ablesen vom Graphen und eine einfache Interpretation des Abgelesenen verlangen. Die Besonderheit der Situation, wenn der Schwerpunkt am tiefsten liegt, soll beschrieben werden (man beachte den Wink mit dem Zaunpfahl durch explizite Angabe des Tiefpunkts in der Einleitung). Der Funktionsterm h wird in der Aufgabe nicht etwa angegeben, um mit seiner Hilfe die Lage des Minimums zu berechnen oder zu bestätigen. (Das Ableiten gebrochen rationaler Funktionen kann laut KMK-Vorgaben wohl nicht verlangt werden. In NRW und einigen anderen Bundesländern stellt sich zudem die Frage, ob Funktionen dieses Typs überhaupt – selbst wenn sie nicht mit substantiellen Aufgabenstellungen verbunden sind -- in Prüfungen vorkommen dürfen.) Es sollen mit Hilfe von h in Teil (c) diejenigen Füllhöhen bestimmt werden, bei welchen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt. (Dies ist der technisch anspruchsvollste Teil; nach Multiplikation der Gleichung h(x)=4 mit (x+1) erhält man eine quadratische Gleichung.)
Schließlich wird in Teil (d), sozusagen als pièce de résistance, eine Dose mit 11 cm Höhe und Funktionsterm

$$k(x)=x/2+s+t/(x+1)$$

betrachtet. Dabei sind die Parameter s und t aus der Information zu bestimmen, dass der Schwerpunkt bei leerer und ganz gefüllter Dose je in der Mitte liegt. (Dies führt auf ein leicht lösbares lineares Gleichungssystem.)

Zur Einordnung:Es handelt sich ausweislich der angegebenen Klassifikation um eine Aufgabenstellung auf „erhöhtem Anforderungs-niveau"; als Hilfsmittel ist ein wissenschaftlich-technischer Taschenrechner (WTR) zugelassen. Der Aufgabenteil repräsentiert etwa ein Viertel einer Analysis-Aufgabe. Der andere Aufgabenteil (welcher die restlichen drei Viertel abdeckt) behandelt ganzrationale Funktionen dritten Grades. Generell sollen solche Beispielaufgaben „exemplarisch [zeigen], wie die in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen und Vorgaben für die Abiturprüfung in Aufgaben und Erwartungshorizonte übersetzt werden können" (IQBc).

3 Was von der Mathematik übrig bleibt

Die Schwierigkeiten bei der Dosenaufgabe in ihrer ursprünglichen Form (Meschede, D. 2006) lagen beim Modellierungsprozess (Wahl geeigneter Koordinaten und Bezeichnungen, Bestimmen von Schwerpunkten); also bei der Übersetzung physikalischer Gegebenheiten in mathematische Formeln und Gleichungen. Das Bestimmen des Minimums ist bei einigermaßen soliden mathematischen Kenntnissen und Fertigkeiten (wie Umgang mit einfachen parameterabhängigen Funktionen) der simpelste Teil des Problems.

In der IQB-Version handelt es sich nun um eine Mathematikaufgabe. Also ist nicht zu erwarten, dass die Problemstellung im Wesentlichen unverändert übernommen wird. Allerdings ist anzumerken, dass hier – trotz der starken Betonung des Themas Modellierung in den neuen Richtlinien -- von Modellierung nichts mehr übrig bleibt, und sogar die entstehende Mathematikaufgabe sorgfältig von realen Bezügen (Massen, Dichten usw.) gereinigt wurde. Auch erscheint es merkwürdig, dass die ganze Teilaufgabe im Grunde nur Kenntnisse und Wissen aus der Sekundarstufe I abfragt.

Mit solcher Kritik gerät man allerdings heutzutage leicht in den Verdacht, „wissenschaftlichen Standards“ nicht zu genügen. Betrachten wir deshalb -- auch aus Gründen der Fairness -- die Maßstäbe, welche vom IQB selbst (auf Grundlage der KMK-Richtlinien) angelegt werden. Den Aufgaben sind auch Erwartungshorizonte sowie eine Einordnung in ein Kompetenz- und Anforderungsschema beigefügt. Für die in Frage stehende Teilaufgabe sind folgende Kompetenzen ausweislich des Schemas von besonderer Bedeutung:

K2: Probleme mathematisch lösen;
K3: Mathematisch modellieren;
K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.

Zum Beispiel wird die Herleitung und Lösung der quadratischen Gleichung in Teil (c) zum mittleren Anforderungsbereich bei Kompetenz K5 gerechnet. (Damit könnte man einverstanden sein, mit dem einschränkenden Verweis auf Sekundarstufe I.)

Die Bestimmung der Parameter s und t in Teil (d) hingegen entspricht laut Vorlage dem höchsten Anforderungsbereich; insbesondere wird bei K3 („Mathematisch modellieren“) das höchste Anspruchsniveau postuliert. Sieht man in den Bildungsstandards nach, so ist auf diesem Niveau „eine komplexe Realsituation [zu] modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen“, oder es sind „mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation [zu] überprüfen, vergleichen und bewerten“. Ersteres trifft hier keinesfalls zu, und zu Zweiterem mag zwar ein mathematisches Modell im Kontext einer Realsituation gegeben sein, aber davon wird nichts überprüft, verglichen oder bewertet. Betrachtet man den mittleren Anforderungsbereich, so könnte man eine der genannten Kompetenzen zu K3, „ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen“, für angemessen halten. Auffällig ist auch, dass Kompetenz K5 mit mittlerem Anforderungsbereich erscheint; die Behandlung eines simplen linearen Gleichungssystems für zwei Unbekannte scheint damit überbewertet.

Damit ist ersichtlich, dass die Aufgabe auch den selbst postulierten Ansprüchen nicht genügt. (Aber vielleicht entspricht auch diese Feststellung nicht „wissenschaftlichen Standards“.)

4 Was vom Modell übrig bleibt

Den Aufgabenstellern ist zu Gute zu halten, dass sie (zunächst) eine Aufgabe mit Realitätsbezug gewählt haben; dies ist bei Einkleidungen nicht der Regelfall. Jedoch gehen im weiteren Verlauf sämtliche (mathematisch oder physikalisch) interessanten Aspekte verloren. Die Pointe, dass der Schwerpunkt für jede zylindrische Dose und jede darin abgefüllte Flüssigkeit immer dann am niedrigsten liegt, wenn seine Höhe mit der des Flüssigkeitsspiegels übereinstimmt, geht verloren, wenn man (wie hier geschehen) ein einzelnes Zahlenbeispiel herausnimmt (für welches diese Eigenschaft zufällig gelten könnte). Die hilfreiche und erkenntnisfördernde Rolle der Mathematik bei der Analyse der physikalischen Situation kann Schülerinnen und Schülern beim Bearbeiten der vorliegenden Aufgabe nicht bewusst werden, da genau dieser Aspekt systematisch ausgeklammert wird. Von einer durchaus interessanten mathematisch-naturwissenschaftlichen Problemstellung bleibt nur ein abgeschmackter Rest, und durch das Auslassen oder die Vorwegnahme aller interessanten Aspekte (ohne jegliche Erklärung) bleibt für die Schülerinnen und Schüler nichts Sinnvolles mehr zu tun.

5 Coda

„Mathematisch Modellieren“ ist eine der sog. prozessbezogenen Kompetenzen, die mit dem Paradigmenwechsel (etwa seit der Jahrtausendwende) in den schulischen Mathematikunterricht Einzug gehalten haben. Die oben diskutierte Aufgabe zeigt exemplarisch die enorme Diskrepanz zwischen Anspruch und Realität. In Prüfungsaufgaben den höchsten Anforderungsbereichen zum Kompetenzbereich K3 zu genügen, ist offensichtlich nicht realisierbar, wie auch die weiteren Beispielaufgaben des

IQB belegen. Im Alltag von Unterricht und (insbesondere) Prüfungen verbirgt sich hinter dem Schlagwort „Modellieren“ oftmals nicht mehr als das Einkleiden simpler mathematischer Aufgabenstellungen in langatmigen Textpassagen. Damit verbunden ist ein sehr ernstes Problem: Im reformierten Mathematikunterricht erwerben Schülerinnen und Schüler inzwischen nicht mehr die nötigen „handwerklichen“ Grundlagen für Modellierungsaufgaben, die z.B. in naturwissenschaftlichen oder ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen vonnöten ist. Im hier diskutierten Beispiel ist es eben nicht mehr möglich, die (einfache) mathematische Analyse auszuführen, weil das dafür nötige Wissen und Können aus den Richtlinien verschwunden ist.

Die Reform schadet denen, die in Studium oder Beruf Mathematik benötigen.

5 Literatur

Literatur

Drösser, C. (2008): Der Mathematik-Verführer, Rowohlt Taschenbuch-Verlag

Herget, W., Jahnke, T., Kroll, W. (2011): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht Sekundarstufe II, Cornelsen, Berlin 2011

Meschede, D. (2006) Gerthsen Physik, 23. Aufl., Springer, Heidelberg

Internet

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQBa) https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik/aufgaben_erhoeht, 15.05.2017

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQBb) https://www.iqb.hu-berlin.de/institut/ab/sek1_ma, 15.05.2017

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQBc) https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi, 15.05.2017

Danksagung

Für Anmerkungen und Hinweise zu einer ersten Version danke ich A. Baumann, T. Jahnke und F. Lemmermeyer.

Kontakt

Sebastian Walcher
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen
52056 Aachen

walcher@matha.rwth-aachen.de

Eingegangen: 01. Februar 2017 / Angenommen: 15. April 2017 / Online publiziert: 17. Mai 2017
Gesellschaft für Didaktik der Naturwissenschaften und der Mathematik (GdNM)